

استاد : کوروش میری زاده

همکلاسی

Hamkelasi.ir

مبحث : جزوه جمع بندی ریاضی تجربی



جزوه جمع بندی ریاضی کنکور

ویژه داوطلبان گروه تجربی

بجز شاگردهای استاد کوروش میری زاده

گردآورنده : کوروش میری زاده

شما دکترای آینده که یک سال شاگرد من بودید من داوطلبی جدیدی هم
که فقط جمع بندی رو میان بازم عین طسول سال با روش ابتکاری و
مفصومی فارغ از فرمول های رایج براشون ریاضی رو واسه ۱۰۰٪ ازدن
جمع بندی من کنم . شما که جای خود داریدن

0912 004 1804 - 0939 346 3778
 @pmm_kourosh_mirizadeh
 @kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

معادله درجه (۲) :

به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ بیان می‌گردد و روش کلی حل آن روش Δ می‌باشد.

۱) $ax^2 + bx + c = 0$

۲) $\Delta = b^2 - 4ac$

۳) $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

اگر $a + b + c = 0$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

اگر $a + c = b$ $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$

بحث در مورد تعداد ریشه‌های یک معادله درجه (۲):

Δ را حساب کرده یکی از ۳ حالت زیر پیش می‌آید:

- $\Delta > 0$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد
- $\Delta = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد
- $\Delta < 0$ معادله ریشه حقیقی ندارد

رابطه بین ریشه‌های یک معادله درجه (۲) بدون حل معادله:

اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، بدون حل معادله داریم:

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$ $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

نکات مهم در مورد تابع معادله درجه (۲)

- شرط اینکه ۲ ریشه یک معادله قرینه هم باشند این است که $b = 0$
- شرط اینکه دوریشه یک معادله عکس هم باشند این است که $a = c$
- شرط اینکه یکی از ریشه‌های معادله k برابر ریشه دیگر باشد این است که

$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$

۴- طریقه نوشتن یک معادله وقتی ریشه‌های آن معلوم باشد:

یک بار ۲ ریشه را جمع کرده، اسم آن را S می‌گذاریم.

یک بار دو ریشه را ضرب کرده و P می‌نامیم.

معادله همواره به صورت مقابل است:

$x^2 - Sx + P = 0$

۵- اگر یکی از ریشه‌های معادله $m - \sqrt{n}$ باشد ریشه دیگر حتماً $m + \sqrt{n}$ است و بالعکس.

۶- شرط مختلف‌العلامت بودن دو ریشه این است که $\frac{c}{a} < 0$

۷- معادله $ax^2 + bx + c$ مفروض است معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش:

الف) قرینه ریشه‌های معادله فوق باشد:

کافی است b را قرینه کنیم، $ax^2 - bx + c = 0$

ب) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله فوق باشد:

کافی است جای a و c را عوض کنیم، $cx^2 + bx + a = 0$

ج) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش عکس و قرینه ریشه‌های معادله فوق باشد:

هر دو عمل بالا را با هم انجام می‌دهیم، $cx^2 - bx + a = 0$

د) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله فوق باشد کافی است:

$ax^2 + b k x + c k^2$

۸- شرط اینکه یک تابع درجه دوم همواره مثبت باشد این است و یا همواره منفی باشد: (به ازای جمیع مقادیر x مثبت یا منفی باشد)

همواره مثبت $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ همواره منفی $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

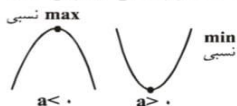
نمودارها

بررسی نمودار توابع :

۱- تابع درجه دوم: به صورت $y = ax^2 + bx + c$ بیان می‌گردد.

I - نام آن سهمی قائم است و نمودار آن به صورت روبرو است.

II - مختصات نقطه اکسترم نسبی در توابع درجه دوم

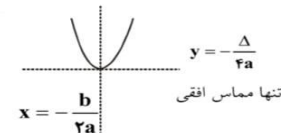


طول اکسترم نسبی $\frac{b}{2a}$
 مقدار اکسترم نسبی $-\frac{\Delta}{4a}$

III - هر تابع درجه دوم دارای یک محور تقارن به

معادله $x = -\frac{b}{2a}$ و خطی که محور تقارن را روی خود منحنی قطع

می‌کند، خط $y = -\frac{\Delta}{4a}$ است.



IV - هر تابع درجه دوم محور y ها را فقط و فقط در یک نقطه قطع

می‌کند. $x = -\frac{b}{2a}$

ها $x = 0 \Rightarrow y = c$ تلاقی با محور y ها

ها $y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ تلاقی با محور x ها

- محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند $\Delta > 0$
- بر محور x ها مماس است $\Delta = 0$
- محور x ها را قطع نمی‌کند $\Delta < 0$



0912 004 1804 - 0939 346 3778

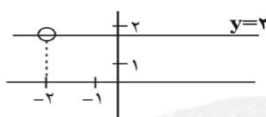
@pmm_kourosh_mirizadeh

@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

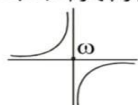
$ad - bc = 0$



۳- هر تابع هموگرافیک دارای ۲ مجانب است یکی افقی و یکی قائم .

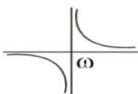
نکته مهم : مرکز تقارن در تابع هموگرافیک همان محل تلاقی مجانبات است.

۴- نمودار تابع هموگرافیک : بستگی به $ad - bc$ دارد :
الف) اگر $ad - bc > 0$ مثبت بود تابع در ربع دوم و چهارم مجانبها قرار می‌گیرد.

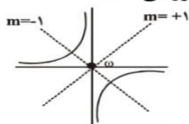


و تابع در یک طرف قائم خود صعودی است.

ب) اگر $ad - bc < 0$ منفی بود تابع در ربع اول و سوم مجانبها و تابع در یک طرف مجانب قائم خود نزولی است.



۵- هر تابع هموگرافیک دارای ۲ محور تقارن عمود بر هم به شیبهای ± 1 است. که هر ۲ از مرکز تقارن عبور می‌کنند.



۶- هرگاه مبدأ مختصات را از 0 به مرکز تقارن انتقال دهیم ضابطه

تابع هموگرافیک در دستگاه جدید به صورت $xy = k$ می‌گردد که $k = \frac{ad - bc}{c^2}$

مشقی : هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته باشد مشتق آن مطابق فرمول‌های زیر محاسبه می‌گردد:

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

یا $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h = \Delta x)$

نکته : تمام تعاریف مشتق منتهی به $0/0$ می‌شود و باید تمام آنها را از راه هویپیتال حل کنید.
مشتق چپ و راست :

مشتق راست $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$

مشتق چپ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$

۱ زمانی تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مشتق دارد که :
پیوسته باشد

۲ مشتق چپ و راست موجود، متناهی و با هم برابر باشد.

بی‌نهایت نشود

۲- **تابع درجه سوم :** به صورت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بیان می‌گردد.

۱- هر تابع درجه سوم دارای یک نقطه عطف به طول $x_1 = -\frac{b}{3a}$ است. که همان مرکز تقارن منحنی است.
۲- برای بررسی نمودار تابع درجه سوم یکبار مشتق بگیرید مساوی صفر قرار دهید.

الف) مشتق دو ریشه دارد :

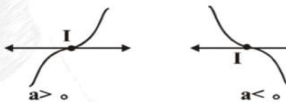


این تابع ۲ اکسترمم و یک نقطه عطف دارد و نقطه عطف وسط پاره خط

بین y_{min} و y_{max} است. $y_1 = \frac{y_{min} + y_{max}}{2}$

$x_1 = \frac{x_{min} + x_{max}}{2}$

ب) مشتق یک ریشه دارد «ریشه مضاعف»: اکسترمم ندارد و یک عطف دارد.



و مماس در عطف موازی محور x است «افقی است»
ج) مشتق ریشه ندارد.

اکسترمم ندارد و یک عطف دارد.
مماس در عطف مایل است.



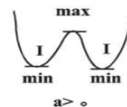
۳- **تابع دو مجذوری :** $y = ax^2 + bx^2 + c$

برای نمودار آن یکبار مشتق بگیرید مساوی صفر قرار دهید.

$y' = 2ax^2 + 2bx = 0$

$2x(2ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$

شکل فقط یک اکسترمم دارد. اگر $a.b > 0$ اگر ۱)
۲) اکسترمم و ۲ عطف دارد. اگر $a.b < 0$



۴- **تابع هموگرافیک :** به صورت $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ بیان می‌گردد.

۱) باید $C \neq 0$ باشد اگر $C = 0$ شود تابع تبدیل به خط راست به معادله $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ می‌گردد.

۲) باید $ad - bc \neq 0$ باشد، اگر $ad - bc = 0$ گردد تابع تبدیل به تابع ثابت می‌شود. که در ریشه مخرج تو خالی است.

مانند : $y = \frac{2x + 4}{x + 2} = \frac{2(x + 2)}{(x + 2)} \Rightarrow y = 2$





0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh



@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

فرمول های مشتق

۱- مشتق توابع جبری :

1) $y = a \rightarrow y' = 0$

$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $y = ax \rightarrow y' = a$

$y = \frac{x}{2\pi} \rightarrow y' = \frac{1}{2\pi}$

3) $y = ax^n \rightarrow y' = nax^{n-1}$

$y = 2x^5 \rightarrow y' = 10x^4$

قضایا :

I) $y = f \pm g \pm h \pm \dots$

$y' = f' \pm g' \pm h' \pm \dots$

II) $y = f \times g \rightarrow y' = f'g + g'f$

III) $y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

هر جا گفتیم u یعنی یک تابع بر حسب x

4) $y = u^n \rightarrow y' = nu'u^{n-1}$

$y = (2x^2 - 1)^{10} \rightarrow y' = 10(2x)(2x^2 - 1)^9$

5) $y = \sqrt[n]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

$y = \sqrt[5]{x^2 - x^2} \rightarrow y' = \frac{2x^2 - 2x}{5\sqrt[5]{(x^2 - x^2)^4}}$

6) $y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

$y = \sqrt{x^2} \rightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x}}$

۲- مشتق توابع مثلثاتی :

1) $y = \sin u \rightarrow y' = u' \cos u$

2) $y = \cos u \rightarrow y' = -u' \sin u$

3) $y = \tan u \rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$

4) $y = \cot u \rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$

5) $y = \sin^n u \rightarrow y' = nu' \cos u \sin^{n-1} u$

6) $y = \cos^n u \rightarrow y' = -nu' \sin u \cos^{n-1} u$

7) $y = \tan^n u \rightarrow y' = nu'(1 + \tan^2 u) \tan^{n-1} u$

8) $y = \cot^n u \rightarrow y' = -nu'(1 + \cot^2 u) \cot^{n-1} u$

نکته : هرگاه کمان خود یک تابع مثلثاتی باشد بهترین روش برای مشتق گیری اینست که از داخل به بیرون مشتق بگیرید.

۳- مشتق تابع قدر مطلق :

$y = |u| \rightarrow y' = \frac{u' \times u}{|u|}$

نکته : هرگاه مشتق تابع قدر مطلق را در یک نقطه بخواهیم ابتدا نقطه را داخل قدر مطلق جایگذاری کنید اگر داخل قدر مطلق مثبت شد خود عبارت و اگر منفی شد قرینه عبارت را بیرون می آوریم و سپس مشتق می گیریم و اگر صفر شد باید در آن نقطه مشتق چپ و راست جداگانه تحلیل گردد.

نکته مهم : توابع قدر مطلق به ازای ریشه های ساده، (توان یک) داخل قدر مطلق مشتق پذیر نیستند مگر آنکه به ازای این ریشه ضریب قدر مطلق صفر شود.

۳- مشتق توابع براکتی :

ابتدا حتماً پیوستگی را بررسی کنید تابع از هر طرفی که پیوسته نباشد از آن طرف مشتق پذیر نیست و برای محاسبه مشتق آن فقط مقدار براکت را در نقطه داده شده به دست آورید و سپس از تابع مشتق بگیرید.

نکته مهم : تابع $y = g(x)[x]$ در $x_0 \in Z$ زمانی مشتق پذیر است که x_0 ریشه مضاعف $g(x)$ باشد.

۴- مشتق توابع چند ضابطه ای

ابتدا حتماً پیوستگی را بررسی کنید تابع از هر طرفی که پیوسته نباشد از آن طرف مشتق پذیر نیست و برای مشتق گیری با توجه به دامنه روبروی آنها حتماً مشتق چپ و راست را جداگانه حساب کنید.

۵- مشتق توابع مرکب

1) $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

$y = f(\sin x) \rightarrow y' = \cos x f'(\sin x)$

I) $y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x) f'(g(x))$

II) $y = g \circ f(x) \Rightarrow y' = f'(x) g'(f(x))$

مشتق تابع ضمنی: هر تابع به صورت $f(x, y) = 0$ را ضمنی گویند که مشتق آن به صورت زیر است :

$y'_x = -\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق نسبت به } y}$

۶- مشتق تابع نمایی و لگاریتمی

1) $y = e^u \rightarrow y' = u' \times e^u$

2) $y = \ln |u| \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

نکات مهم در مشتق :

نکته ۱ : هر تابع را می توانید قبل از مشتق گیری تا حد امکان ساده کنید.

نکته ۲ : اگر تابع داده شده بین جملاتش فقط ضرب یا تقسیم باشد و مشتق در یک نقطه را بخواهند اگر به ازای نقطه داده شده فقط یکی از جملات صفر شود فقط از جمله صفر شده در جای خود مشتق بگیرید و بقیه جملات در جای خود نوشته شود.

مثال : اگر $f(x) = x^2(x^2 + 1)(2x - 2)$ مطلوبست $f'(1)$

$f'(x) = x^2(x^2 + 1) \times 2$

$f'(1) = 1(1+1) \times 2 = 4$

«مشتق مرتبه n ام»

$y' \rightarrow y'' \rightarrow y''' \rightarrow y^{(4)} \rightarrow \dots y^{(n)}$

1) $y = \frac{k}{ax + b} \rightarrow y^{(n)} = \frac{k(-1)^n \times n! \times a^n}{(ax + b)^{n+1}}$

2) $y = \sin ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$

$y = \cos ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$

نکته : برای مشتق مرتبه n ام Sin, Cos, a^n را می نویسیم و برای نسبت مشتق n ام کافیست n را بر 4 تقسیم کنید و به تعداد باقی مانده مشتق بگیرید.



0912 004 1804 - 0939 346 3778
 @pmm_kourosh_mirizadeh
 @kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

کاربرد مشتق :

معادله مماس و قائم بر نمودار f از نقطه ای روی منحنی:

نیاز به اطلاعات زیر داریم:
 I : نقطه روی منحنی: $A(x_0, y_0)$

II : شیب خط که همواره داریم در نقطه تماس $m = y'$ مماس و معادله خط به صورت $y - y_0 = m(x - x_0)$

توجه: قائم $m = -\frac{1}{m}$

نکته: هرگاه گفته شود خط مماس بر منحنی موازی محور X هاست یعنی $m = y' = 0$



نکته: هرگاه گفته شود خط مماس بر منحنی موازی محور Y ها یعنی $m = y' = \infty$



وضعیت دو منحنی نسبت به هم دو منحنی را با هم تلاقی می دهیم.

الف) معادله تلاقی ریشه ندارد. در این حالت دو منحنی همدیگر را قطع نمی کنند.

ب) معادله تلاقی ریشه مضاعف دارد. در این حالت دو منحنی بر هم مماسند.

ج) معادله تلاقی ریشه ساده دارد در این حالت دو منحنی همدیگر را قطع می کنند.

نکته خیلی مهم: هرگاه تستی گفته شود دو منحنی بر هم مماسند یا خط بر منحنی مماس است معادله تلاقی آنها باید ریشه مضاعف داشته باشد.

1) ریشه مضاعف از طرفین مشتق بگیرید.

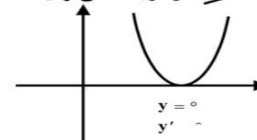
از درجه 2 می توانید $\Delta = 0$ قرار دهید.

زاویه بین دو منحنی یا یک خط و یک منحنی:

1) ابتدا دو تابع را تلاقی می دهیم تا طول نقطه تلاقی بدست آید.
 2) شیب هر کدام را در نقطه تلاقی حساب می کنیم m_1, m_2 می نامیم.
 3) از رابطه $\text{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ زاویه بین دو منحنی α بدست می آید.

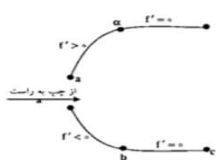
نکته: هرگاه گفته شود منحنی بر محور X ها مماس است. $y = 0$ باید ریشه مضاعف داشته باشد.

ریشه مضاعف مشتق بگیرید در درجه 2 می توانید $\Delta = 0$ قرار دهید.



توابع صعودی و نزولی ثابت :

تابع پیوسته f را در فاصله (a, b) الف) صعودی گویند هرگاه: $f' \geq 0$ و اکیداً صعودی گویند هرگاه: $f' > 0$
 ب) نزولی گویند هرگاه: $f' \leq 0$ و اکیداً نزولی گویند هرگاه: $f' < 0$
 ج) ثابت گویند هرگاه: $f' = 0$

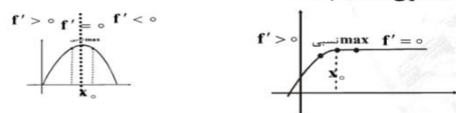


اکیداً صعودی $(a, b) \rightarrow f' > 0$
 ثابت $(b, c) \rightarrow f' = 0$
 صعودی $(a, c) \rightarrow f' \geq 0$

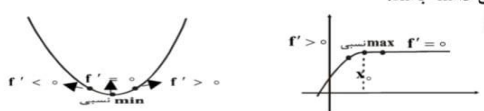
اکیداً نزولی $(a, b) \rightarrow f' < 0$
 ثابت $(b, c) \rightarrow f' = 0$
 نزولی $(a, c) \rightarrow f' \leq 0$

نقاط اکسترم نسبی :

1) max نسبی: نقطه ایست که نسبت به نقاط مجاور خود عرض بیشتر یا مساوی داشته باشد.



2) min نسبی: نقطه ایست که نسبت به نقاط مجاور خود عرض کمتر یا مساوی داشته باشد.



نکته مهم: اگر x_0 اکسترم نسبی باشد.

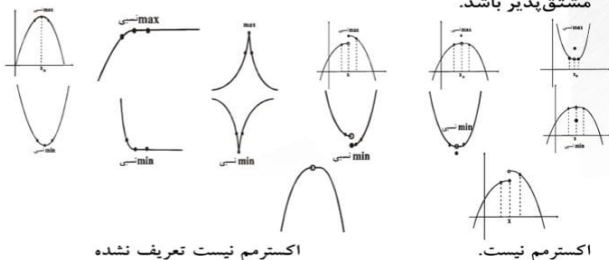
1) تابع باید در x_0 تعریف شده باشد.

2) علامت مشتق در طرفین آن عوض می شود.

3) مشتق در این نقطه یا صفر است یا اصلاً وجود ندارد.

نکات مهم در مورد اکسترم های نسبی

1) لزومی ندارد که تابع در نقطه اکسترم نسبی پیوسته یا مشتق پذیر باشد.



اکسترم نیست تعریف نشده

اکسترم نیست



0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh



@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

۲) دو سر تابع هیچ گاه اکسترمم نسبی نمی شوند.



۳) تابع ثابت تمام نقاطش هم max نسبی است و هم min نسبی



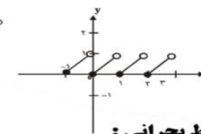
۴) تابع $y = |x|$

اگر $\begin{cases} x_0 \in Z \Rightarrow \max x_0 \\ x_0 \notin Z \Rightarrow \min \max x_0 \end{cases}$



۵) تابع $y = x - |x|$

$\begin{cases} x_0 \in Z \rightarrow \min x_0 \text{ نسبی است و مطلق} \\ x_0 \notin Z \rightarrow \text{اکسترمم نیست} \end{cases}$



نقاط بحرانی :

نقطه x_0 متعلق به دامنه f را بحرانی گویند وقتی مشتق در این نقطه یا صفر شود و یا وجود نداشته باشد.

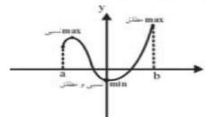
$y' = 0$ صورت \rightarrow در توابع چند ضابطه ای مشتق پذیری در نقطه مرزی بررسی شود اگر مشتق پذیر نبود بحرانی است.

نکات مهم در نقاط بحرانی

- دو سر تابع به شرطی که در دامنه باشند بحرانی هستند
- تمام اکسترمم های بحرانی هستند ولی هر نقطه بحرانی ای اکسترمم نیست.
- هر جا تابع پیوسته نباشد بحرانی است.

اکسترمم های مطلق :

- max مطلق:** نقطه ایست که نسبت به تمام نقاط موجود در تابع عرض بیشتری داشته باشد.
 - min مطلق:** نقطه ایست که نسبت به تمام نقاط موجود در تابع عرض کمتری داشته باشد.
- توجه ۱: دو سر تابع می توانند اکسترمم مطلق باشند
توجه ۲: هرگاه نقطه ای که به عنوان اکسترمم مطلق انتخاب می گردد تو خالی باشد ($x_0 \notin D_f$) می گوئیم اکسترمم مطلق نداریم.



روش به دست آوردن اکسترمم های مطلق در یک فاصله $[a, b]$:

- نقاط بحرانی تابع را به دست می آوریم.
- نقاط به دست آمده و دو طرف فاصله را در تابع اصلی قرار می دهیم آنکه مقدارش بیشتر شد max مطلق و آنکه کمتر شد min مطلق است.

طریقه به دست آوردن طول اکسترمم نسبی :

ریشه های ساده طول نقطه اکسترمم نسبی هستند
ریشه های مضاعف اکسترمم نیستند و عطف می باشند $\rightarrow y' = 0$ اکسترمم نسبی

آزمون مشتق دوم در تعیین max یا min بودن اکسترمم نسبی :
 $f''(x_0) > 0$ را به دست آورده و x_0 را در آن جاگذاری می کنیم.

$f''(x_0) > 0 \rightarrow \min$ نسبی است x_0 .

$f''(x_0) < 0 \rightarrow \max$ نسبی است x_0 .

$f''(x_0) = 0 \rightarrow$ با این آزمون قابل بررسی نیست

جهت تقعر و نقطه عطف .

$f''(x)$ را محاسبه نموده و در هر فاصله ای که:

(۱) $f''(x) > 0$ تقعر رو به بالا است

(۲) $f''(x) < 0$ تقعر رو به پایین است.



عطف: نقطه ای است که جهت تقعر تابع در این نقطه عوض می شود.

توجه: تابع باید در نقطه عطف پیوسته و مشتق پذیر باشد.

چون پیوسته نیست \leftarrow عطف نیست



چون پیوسته نیست \leftarrow عطف نیست

نکته مهم : برای به دست آوردن طول نقطه عطف

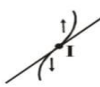
فقط ریشه های ساده طول نقطه عطف است.

$y'' = 0$ برای عطف
ریشه های مضاعف عطف نیست.

نکته: برای تعیین اینکه تابع در چه فاصله ای تقعرش رو به بالا و در چه فاصله ای تقعرش رو به پایین است مشتق دوم تابع را به دست آورده تعیین علامت می کنیم.

چه عباراتی در یک تست ما را متوجه نقطه عطف می کند؟

- هرگاه گفته می شود جهت تقعر تابع در این نقطه عوض می شود
- هرگاه گفته شود مشتق دوم تابع در این نقطه با تغییر علامت صفر می شود.
- هرگاه گفته شود مماس بر منحنی در این نقطه از منحنی عبور می کند.



نکته مهم :

خواص مشترک اکسترمم نسبی و عطف :

- مختصات نقطه اکسترمم و عطف در منحنی صدق می کند.
- طول اکسترمم نسبی مشتق اول را صفر می کند و طول عطف مشتق دوم را صفر می کند.



0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh



@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

نکته: نامفیی‌ها در ریاضی بر ۳ نوع می‌باشند: I. رادیکال‌ها با فرجه‌ی زوج II. عبارتهای با توان زوج III. قدرمطلقها
نکته: اگر جمع چند نامفیی صفر شود به این مفهوم است که تک تک آنها برابر صفر است.

چند ضابطه‌ای

چندضابطه‌ای‌ها به شرطی تابع است که: (۱) هر ضابطه در دامنه‌ی روبروی خود تابع باشد.

(۲) دامنه‌ها عضوهای مشترک نداشته باشند. اگر دامنه‌ها در یک عضو مشترک شدند به شرطی تابع است که به ازای آن عضو مشترک هر دو ضابطه y های مساوی دهد.

۱- دامنه «حدود تغییرات x»

۱- دامنه‌ی توابع خطی R است.
۲- **دامنه‌ی توابع کسری:** مخرج را برابر صفر قرار بده، دامنه می‌شود: $\left\{ \text{ریشه‌های مخرج} \right\} - R$

نکته: اگر مخرج ریشه نداشت، دامنه R است.

۳- **دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد:** فرجه‌ی فرد را در نظر بگیرد. هر تابعی که داخل آن است مدنظر است.

۴- **دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج:** زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

توجه: اگر رادیکال در مخرج بود فقط بزرگتر از صفر قرار دهید.

۵- دامنه‌ی توابع مثلثاتی:

الف) دامنه‌ی sin و cos همان دامنه‌ی کمان است.
ب) دامنه‌ی tg و cot

دامنه $\rightarrow D = R - \left\{ \text{کمان} = k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$
دامنه $\rightarrow D = R - \{ \text{کمان} = k\pi \}$

۶- **دامنه‌ی توابع لگاریتمی:** لگاریتم \log_b دارای سه شرط

شرط $\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{array} \right.$ است که اشتراک این سه شرط دامنه‌ی تابع است.

۷- **دامنه‌ی توابع چندضابطه‌ای:** دامنه‌ی تک تک آنها را حساب کنید و بین دامنه‌ها اجتماع بگیرید.

۸- **دامنه‌ی توابع قدرمطلق و جزءصحیح:** ربطی به قدرمطلق و جزءصحیح ندارد و دامنه‌ی تابع داخلی آنها را حساب کنید.

تساوی دو تابع: (۱) دامنه‌هایشان با هم مساوی باشد.
(۲) ضابطه‌ها با هم مساوی باشد.

اعمال روی توابع
الف) چهار عمل اصلی روی توابع

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
 $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$
 $D_{f \pm g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g$
 $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\}$

نکته مهم: در تمام توابع قدر مطلق و چند ضابطه‌ای هر سوالی در مورد کاربرد مشتق مطرح شد حتماً نمودار آنرا رسم نمایید.

نکته مهم: در توابع به صورت $y = (ax + b)^n \times g(x)$

طول نقطه عطف $x = -\frac{b}{a}$ فرد n
نسبی $\left\{ \begin{array}{l} \text{اگر } \left\{ \begin{array}{l} g\left(-\frac{b}{a}\right) > 0 \\ \text{اکسترم نسبی است} \end{array} \right. \rightarrow \text{min} \\ g\left(-\frac{b}{a}\right) < 0 \rightarrow \text{max} \end{array} \right.$

نکته: مقایسه نمودار f با f'

۱- هر جا f' بالای محور x ها بود تابع f صعودی و هر جا f' پایین، محور x ها بود تابع f نزولی است.

۲- نقاطی که مشتق در آنها صفر است (تلاقی مشتق با محور x ها) و یا مشتق وجود ندارد (تابع مشتق تعریف نشده) نقاط بحرانی f است.

۳- نقاطی که مشتق در آنها صفر است یا وجود ندارد به شرط اینکه حتماً تغییر علامت داشته باشیم، نقاط اکسترم نسبی f است.

۴- هر جا f' صعود کند تقعر f رو به بالا و هر جا f' نزول کند تقعر f رو به پایین است.

۵- min و max هایی که در نمودار f' مشاهده می‌گردد نقاط عطف f است.

تابع

زوج مرتب: هر دو تایی به صورت (a, b) را زوج مرتب گویند که ترتیب قرار گرفتن آنها مهم باشد.

قرار گرفتن آنها مهم باشد. $(a, b) \neq (b, a)$

توجه: اگر $(a, b) = (c, d)$ آنگاه $\left\{ \begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array} \right.$

تابع:

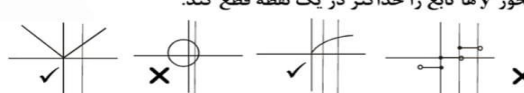
I. **از دیدگاه زوج مرتبی:** مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایز عضوهای اول مساوی نداشته باشند.

باشند. $\{(-1, 2)\}$

نکته ۱: تک عضوها تابع هستند.

نکته ۲: هرگاه دو زوج مرتب عضوهای اولشان مساوی باشند به شرطی تابع است که عضوهای دوم هم مساوی باشند.

II. **از دیدگاه نموداری:** نموداری تابع است که به ازای هر خط موازی محور y ها تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



III. **از دیدگاه ضابطه‌ای:** ضابطه‌ای تابع است که به ازای هر x دلخواه حداکثر یک y نتیجه دهد.

نتیجه: اگر y داخل قدرمطلق یا براکت یا توان زوج باشد معمولاً تابع نیست.





0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh



@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

ب) ترکیب توابع:

$$\begin{aligned} \text{fog}(x) &= f(g(x)) \\ \text{gof}(x) &= g(f(x)) \\ \text{fof}(x) &= f(f(x)) \\ \text{gog}(x) &= g(g(x)) \\ D_{\text{fog}(x)} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ D_{\text{gof}(x)} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \end{aligned}$$

اعمال روی توابع زوج مرتبی

عمل خواسته شده روی مؤلفه دوم دامنه مشترک انجام می‌شود.
نکته ۱: هرگاه F و f معلوم باشند و g فرض کرده و x را برحسب t به دست آورده و کافیسست f فرض کرده و x را برحسب t محاسبه نمود باید
نکته ۲: هرگاه از $g(x) = t$ نتوان x را برحسب t محاسبه نمود باید در عبارت f را تولید کنیم.
نکته ۳: اگر F و f معلوم و g را بخواهد مطابق مثال زیر عمل کنید.

مثال: ۱- اگر $F(x) = 2x + 4$ و $\text{Fog}(x) = 2x - 1$ مطلوبست $g(x)$:

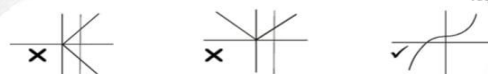
$$\begin{aligned} F(g(x)) &= 2x - 1 \\ F(x) = 2x + 4 &\Rightarrow F(g(x)) = 2g(x) + 4 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} 2g(x) + 4 = 2x - 1 \\ g(x) = \frac{2x - 5}{2} \end{cases}$$

تابع یک به یک:

(I) از دیدگاه زوج مرتبی: علاوه بر دارا بودن شرط تابع نباید مؤلفه‌های دوم با هم مساوی باشند.

(II) از دیدگاه ضابطه‌ای: $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(III) از دیدگاه نموداری: علاوه بر دارا بودن شرط تابع هر خط که موازی محور x ها رسم گردد باید حداکثر تابع را در یک نقطه قطع نماید.



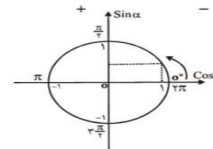
نکته ۱: اگر f و g یک به یک باشند fog و gof و fof و gog یک به یک هستند.

نکته ۲: تابع هموگرافیک $y = \frac{ax + b}{ax + c}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ یک به یک است.

دایره مثلثاتی:

دایره‌ای است به شعاع یک که مرکز آن انتهای سمت راست قطر افقی است. جهت حرکت خلاف جهت عقربه‌های ساعت است و اگر برعکس این جهت حرکت کنیم زاویه منفی می‌شود.

	Sin	Cos	tg	Cot
ناحیه اول	+	+	+	+
ناحیه دوم	+	-	-	-
ناحیه سوم	-	-	+	+
ناحیه چهارم	-	+	-	-



نسبت‌های مثلثاتی $(-\alpha), 2\pi \pm \alpha, \pi \pm \alpha$
 نسبت تغییر نمی‌کند ولی علامت آن با توجه به ناحیه ممکن است عوض شود.

$$\text{نسبت‌های مثلثاتی } \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, \frac{\pi}{2} \pm \alpha$$

نسبت عوض می‌گردد و علامت با توجه به ناحیه تعیین می‌شود.

نکته: نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$

در Sin و Cos اگر k فرد بود از k صرفنظر کنید.
 اگر k زوج بود از $k\pi$ صرفنظر کنید.

در tg و cot چه k فرد و چه k زوج از $k\pi$ صرفنظر نمایند.
فرمول‌های مثلثاتی:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$2) \text{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \text{Cot}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$3) \text{tg}^2 \alpha \times \text{Cot}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{Cot}^2 \alpha} \\ \text{Cot}^2 \alpha = \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha} \end{cases}$$

$$4) 1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \text{Cot}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$5) \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$6) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

بسط $(a \pm b)$

$$\sin(a \oplus b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a \oplus b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg} a + \text{tg} b}{1 - \text{tg} a \text{tg} b}$$

$$\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg} a - \text{tg} b}{1 + \text{tg} a \text{tg} b}$$

نسبت‌های $2x$ و $3x$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\text{tg} 2x = \frac{2\text{tg} x}{1 - \text{tg}^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

فرمول‌های طلایی:

$$\cos^2 ax = \frac{1 + \cos 2ax}{2}$$

$$\sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2}$$





0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh



@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

فرمول مهم :

$$\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int (\sqrt{x+1})(x^2 + x + 1)^5 dx = \frac{(x^2 + x + 1)^6}{6} + c$$

۲) هرگاه انتگرال داده شده به صورت کسری باشد که درمخرج یک عبارت رادیکالی ۲ جمله‌ای داشته باشیم حتماً صورت و مخرج را در مزدوج رادیکال ضرب کنید و سپس انتگرال بگیرید.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \int \frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x+2-2} dx$$

$$= \int (x+2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} = \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}x + c$$

۳) انتگرال \sin^2, \cos^2 : حتماً از دو فرمول مثلثاتی زیر استفاده کنید:

$$\sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2} \quad \cos^2 ax = \frac{1 + \cos 2ax}{2}$$

۴) انتگرال \cot^2, \tan^2 : داخل انتگرال را یکبار بعلاوه یک و یکبار منهای یک کنید و سپس انتگرال بگیرید.

$$\int \cot^2 \frac{x}{3} dx = \int \cot^2 \frac{x}{3} + 1 - 1 = \frac{-1}{3} \cot \frac{x}{3} - x + c$$

۵) انتگرال \cos^3, \sin^3 :

یک توان کم کنید و توان زوج حاصل را با استفاده از فرمول اولیه

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 ax &= 1 - \sin^2 ax \\ \sin^2 ax &= 1 - \cos^2 ax \end{aligned} \right\} \text{مثلثات بنویس.}$$

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

۶) چه انتگرالهایی جواب آنها \ln است. $\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + c$

انتگرال‌های کسری که مشتق مخرج در صورت وجود داشته باشد جواب \ln مخرج است.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + c$$

۷) انتگرال \cot, \tan آنها به فرم \cos, \sin بنویس که جواب است.

$$\int \tan^2 x dx = \frac{-1}{-2} \int \frac{-2 \sin^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + c$$

۸) انتگرالی که در مخرج \sin^2 یا \cos^2 باشد: از دو فرمول مثلثاتی زیر استفاده می‌شود.

$$\frac{1}{\sin^2 ax} = 1 + \cot^2 ax$$

$$\frac{1}{\cos^2 ax} = 1 + \tan^2 ax$$

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

$$1 - \cos(u) = 2 \sin^2 \frac{u}{2}$$

$$1 + \cos(u) = 2 \cos^2 \frac{u}{2}$$

معادلات محاسباتی (حالت‌های کلی) :

$$1) \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$2) \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$3) \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$4) \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 x &= \sin^2 \alpha \\ \cos^2 x &= \cos^2 \alpha \\ \tan^2 x &= \tan^2 \alpha \\ \cot^2 x &= \cot^2 \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

فرمول‌های انتگرال :

$$1) \int adx = ax + c$$

$$2) \int ax^n dx = a \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

قضایا :

$$I) \int aF(x) dx = a \int F(x) dx$$

$$II) \int (f \pm g \pm h \pm \dots) dx = \int f dx \pm \int g dx \pm \int h dx \pm \dots$$

$$\int (\sqrt{x^2 - x + 1}) dx = \frac{2x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$$

نکته مهم : در حل انتگرال هر جا رادیکال دیدید به صورت توان کسری

بنویسید. $(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}})$ و اگر متغیر در مخرج بود آنرا به این

$$\text{صورت بیاورید: } \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{3 \sqrt{x}} dx = \int x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^2 dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$$

انتگرال مثلثاتی :

$$1) \int a \sin kx dx = -a \frac{1}{k} \cos kx + c$$

$$2) \int a \cos kx dx = a \frac{1}{k} \sin kx + c$$

$$3) \int a(1 + \tan^2 kx) dx = a \frac{1}{k} \tan kx + c$$

$$4) \int a(1 + \cot^2 kx) dx = -a \frac{1}{k} \cot kx + c$$

روش‌های انتگرال گیری :

۱) عبارت‌های تواندار زمانی انتگرال دارند که بدون در نظر گرفتن توان مشتق پایه در کنارشان وجود داشته باشد.





0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh



@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

فرم ضمنی معادله دایره:

به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است که:

I : ضریب x^2 و y^2 باید یک باشد. اگر دو عدد برابر بود تمام معادله را بر آن عدد تقسیم کنید و اگر دو عدد نابرابر بود دیگر دایره نیست.

II : مختصات مرکز از روی فرم ضمنی
 مشتق نسبت به x به $0 = x$
 مشتق نسبت به y به $0 = y$

III : اندازه شعاع از روی فرم ضمنی $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

IV : فرم ضمنی بالا معادله خانواده دایره است که این خانواده عبارتند از ۱: دایره ۲: نقطه ۳: تهی که برای تشخیص:

دایره $a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow$

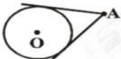
تهی $a^2 + b^2 - 4c < 0 \Rightarrow$

نقطه $a^2 + b^2 - 4c = 0 \Rightarrow$

وضعیت نقطه نسبت به دایره

برای بررسی وضعیت نقطه (x_0, y_0) نسبت به دایره کفایت مختصات (x_0, y_0) را در دایره قرار دهید و حاصل را $f(x_0, y_0)$ بنامید.

۱) $f(x_0, y_0) > 0$ نقطه خارج دایره



۲) $f(x_0, y_0) = 0$ نقطه روی دایره



۳) $f(x_0, y_0) < 0$ نقطه داخل دایره



نکته مهم: ۱) از هر نقطه خارج دایره ۲ قطعه مماس می توان بر دایره رسم نمود که طول آن برابر است با:

$\sqrt{f(x_0, y_0)}$ طول قطعه مماس

۲) از هر نقطه روی دایره می توان یک خط مماس رسم نمود.

۳) از هر نقطه داخل دایره نمی توان مماس بر دایره رسم نمود ولی بی شمار وتر از این نقطه می گذرد.

طول کوچکترین وتر $= 2\sqrt{|f(x_0, y_0)|}$

قطر = طول بزرگترین وتر

به دست آوردن کوتاهترین و بلندترین فاصله ی یک نقطه نسبت به یک دایره

الف) نقطه خارج دایره باشد.

کمترین $= |AO - R|$

بیشترین $= |AO + R|$

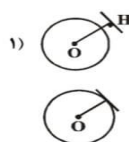
ب) نقطه داخل دایره باشد.

کمترین $= |R - OA|$

بیشترین $= |OA + R|$

وضعیت خط نسبت به دایره

خط دایره را قطع نمی کند. $OH > R \Rightarrow$



$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\frac{1}{\tan x} + c$

۹) انتگرال نمایی:

$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$

$\int e^{rx} dx = \frac{1}{r} e^{rx} + c$

$\int \frac{dx}{e^x} = \int e^{-x} dx = -\frac{1}{e^x} + c$

محاسبه انتگرال معین از روی نمودار تابع: در فاصله داده شده مساحت هایی که نمودار با محور x اشغال می کند را محاسبه کنید و مجموع مساحت های بالای محور x ها را از تمام مساحت های پایین محور x ها کم می کنیم.

انتگرال معین از توابع قدر مطلق:

ریشه داخل قدرمطلق را به دست آورید:

الف) اگر ریشه در محدوده نباشد به محدوده کاری نداریم

ب) اگر ریشه در محدوده باشد، محدوده را با توجه به ریشه به شکل

زیر تفکیک می کنیم. $\int_a^b = \int_a^{\text{ریشه}} + \int_{\text{ریشه}}^b$

و در هر فاصله ابتدا عبارت را از قدرمطلق بیرون آورید و سپس انتگرال بگیرید.

مشتق گیری از انتگرال:

I) مشتق گیری از انتگرال نامعین:

$y = \int F(x) dx \rightarrow y' = f(x)$

II) مشتق گیری از انتگرال معین

$y = \int_{F(x)}^{g(x)} h(t) dt \Rightarrow y' = g'(x)h(g(x)) - F'(x)h(F(x))$

انتگرال معین

$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

خواص انتگرال معین:

۱) $\int_a^a f(x) dx = 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$

۲) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

۳) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

$\int_1^4 = \int_1^{3/5} + \int_{3/5}^4$

مثال) اگر $F(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ مطلوب است $\int_1^4 F(x) dx$

$\int_1^4 F(x) dx = \int_1^2 2x dx + \int_2^4 (3x^2 - 1) dx = x^2 \Big|_1^2 + (x^3 - x) \Big|_2^4$

مقاطع مخروطی:

معادله کانونی دایره:

اگر مرکز دایره $O \Big|_{\beta}^{\alpha}$ و شعاع دایره R باشد معادله کانونی دایره:

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$



0912 004 1804 - 0939 346 3778
 @pmm_kourosh_mirizadeh
 @kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

۱) $AA' = 2a$ قطر بزرگ

$BB' = 2b$ قطر کوچک

$FF' = 2c$ فاصله‌ی کانونی

۲) A و A' دو سر قطر بزرگ

B و B' دو سر قطر کوچک

F و F' کانون‌ها هستند که همیشه روی قطر بزرگند.

O مرکز که همیشه وسط AA' و BB' و FF' است.

۳) رابطه‌ی مهم در بیضی: $a^2 = b^2 + c^2$

۴) خروج از مرکز بیضی (e): $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

توجه: در بیضی ($e < 1$) است.

۵) طول وتر کانونی بیضی: $MN = \frac{2b^2}{a}$

۶) مساحت بیضی: $S = \pi ab$

۷) مختصات رئوس و کانون‌ها:

α	$A \begin{vmatrix} a+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix}$	$A' \begin{vmatrix} -a+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix}$	
β	$B \begin{vmatrix} o+\alpha \\ b+\beta \end{vmatrix}$	$B' \begin{vmatrix} o+\alpha \\ -b+\beta \end{vmatrix}$	$F \begin{vmatrix} c+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix}$ $F' \begin{vmatrix} -c+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix}$

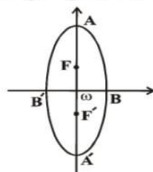
مختصات مرکز

۸) معادله‌ی کانونی بیضی افقی:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

بیضی قائم

تمام اطلاعات شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ بیضی افقی در مورد بیضی قائم نیز صادق است.



۷) مختصات رئوس و کانون‌ها:

α	$A \begin{vmatrix} o+\alpha \\ a+\beta \end{vmatrix}$	$A' \begin{vmatrix} o+\alpha \\ -a+\beta \end{vmatrix}$	
β	$B \begin{vmatrix} b+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix}$	$B' \begin{vmatrix} -b+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix}$	$F \begin{vmatrix} c+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix}$ $F' \begin{vmatrix} -c+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix}$

مختصات مرکز

۸) معادله‌ی کانونی بیضی قائم «کانونی»:

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} + \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$$

نکات: ۱) در بیضی همیشه $a > b$ است پس عدد بزرگ در مخرج همیشه a^2 است.

- ۲) عدد بزرگ در مخرج x بود ← افقی
 عدد بزرگ در مخرج y بود ← قائم

فرم ضمنی معادله‌ی بیضی

به صورت $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ است. $A \neq B$ ولی هم‌علامت»

- ۱) تشخیص نوع بیضی از روی فرم ضمنی: $A > B$ بیضی قائم
 $B > A$ بیضی افقی

۲) خط بر دایره مماس است $OH = R \Rightarrow$

۳) خط دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند $OH < R \Rightarrow$



اندازه‌ی مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک خارجی $= \sqrt{(OO')^2 - (R - R')^2}$



مماس مشترک داخلی $= \sqrt{(OO')^2 - (R + R')^2}$



وضعیت دو دایره

۱- مرکز و شعاع هر کدام را به دست آورید.

۲- OO' (فاصله‌ی دو مرکز) را با $R + R'$ یا $|R - R'|$ مقایسه کنید.

۱) دو دایره بیرون هم $OO' > R + R'$



۲) دو دایره مماس بیرون $OO' = R + R'$



۳) دو دایره مماس درون $OO' = |R - R'|$



۴) دو دایره متقاطع $|R - R'| < OO' < R + R'$



۵) دو دایره درون هم «متداخل» $OO' < |R - R'|$



۶) دو دایره هم‌مرکز $OO' = 0$



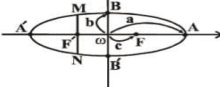
وتر مشترک

دو دایره‌ی متقاطع اگر نقاط تقاطع آنها را به هم وصل کنیم به این پاره‌خط وتر مشترک ۲ دایره می‌گویند.



الف) معادله‌ی وتر مشترک: ۲ معادله را مساوی هم قرار داده، توان ۲ها حذف می‌شود. هر چه ماند معادله‌ی مشترک ۲ دایره است.

ب) طول وتر مشترک: ابتدا معادله‌ی وتر مشترک را به دست آورید و معادله‌ی به دست آمده را با یکی از دو دایره تلافی می‌دهیم تا طول نقطه‌ی تلافی به دست آید. فاصله‌ی دو نقطه‌ی به دست آمده طول وتر مشترک است.



بیضی افقی



0912 004 1804 - 0939 346 3778

@pmm_kourosh_mirizadeh

@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

(۷) معادله ی کانونی هذلولی افقی:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

(۸) هر هذلولی ۲ مجانب مایل دارد که محل تلاقی آنها مرکز است که معادله ی آن به صورت زیر است:

$$\frac{(x - \alpha)}{a} \pm \frac{(y - \beta)}{b} = 0$$

(۹) شیب مجانب مایل در هذلولی افقی:

$$m = \pm \frac{b}{a}$$

(۱۰) فاصله ی کانون تا مجانب:

(۱۱) فاصله ی رأس کانون تا مجانب:

$$\frac{ab}{c}$$

(۱۲) مساحت مستطیل هذلولی:

$$S = 4ab$$

فرم ضمنی هذلولی

به صورت $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ است. « A و B مختلف‌العلامه »

(۱) تشخیص نوع هذلولی:

$$\left. \begin{array}{l} A > 0 \text{ هذلولی قائم} \\ B > 0 \text{ هذلولی افقی} \end{array} \right\}$$

(۲) مرکز به روش مشتق

(۳) خروج از مرکز

$$e = \sqrt{1 + \frac{B, A \text{ ضریب مثبت بین}}{B, A \text{ ضریب منفی بین}}}$$

(۴) اگر $A = -B$ به این هذلولی متساوی‌القطرین گویند.

(۵) اگر ۴ مورد فوق را بخواهد روش تستی دارد برای بقیه موارد باید فرم ضمنی به کانونی تبدیل شود.

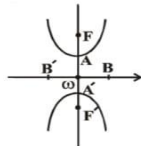
(۶) معادله ی فوق معادله ی خانواده ی هذلولی است که برای تشخیص، مختصات مرکز را به دست آورده، در فرم ضمنی قرار دهید.

هذلولی $F(\alpha, \beta) \neq 0 \Rightarrow$

دو خط راست $F(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow$

II. هذلولی قائم

موارد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ هذلولی افقی در مورد هذلولی قائم نیز صادق است.



(۶) مختصات رئوس و کانون‌ها:

$$A \begin{vmatrix} o+\alpha \\ a+\beta \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} o+\alpha \\ -a+\beta \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} b+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} -b+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix} \quad F \begin{vmatrix} o+\alpha \\ c+\beta \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} o+\alpha \\ -c+\beta \end{vmatrix}$$

(۷) معادله ی کانونی هذلولی قائم:

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$$

(۸) معادله ی مجانب‌های هذلولی قائم:

$$\frac{(y - \beta)}{a} \pm \frac{(x - \alpha)}{b} = 0$$

(۹) شیب مجانب مایل در هذلولی قائم:

$$m = \pm \frac{a}{b}$$

(۲) به دست آوردن مرکز از روی فرم ضمنی: از روش مشتق مانند دایره

(۳) خروج از مرکز از روی فرم ضمنی

$$e = \sqrt{1 - \frac{B, A \text{ ضریب کوچک بین}}{B, A \text{ ضریب بزرگ بین}}}$$

(۴) اگر ۳ مورد فوق را در تست بخواهد روش تستی داریم اگر هر مورد دیگر را بخواهد باید فرم ضمنی را به کانونی تبدیل کنیم.

برای تبدیل فرم ضمنی به کانونی \Leftarrow از مربع کامل

(۵) فرم ضمنی فوق فرم خانواده ی بیضی است که برای تشخیص مرکز را به دست آورده و در معادله صدق می‌دهیم.

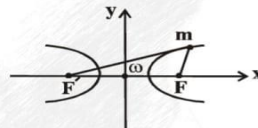
تهی $f(\alpha, \beta) > 0 \Rightarrow$

بیضی $f(\alpha, \beta) < 0 \Rightarrow$

نقطه $f(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow$

هذلولی

مجموعه نقاطی از صفحه که تفاضل فاصله ی آنها از ۲ نقطه ی ثابت در صفحه یک مقدار ثابتی گردد.



$$|mF - mF'| = 2a \text{ ثابت}$$

هذلولی بر ۲ نوع است.

I. هذلولی افقی

(۱) قطر کانونی $AA' = 2a$

(۲) قطر غیرکانونی $BB' = 2b$

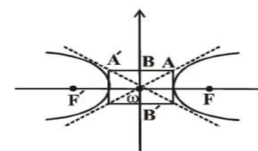
(۳) فاصله ی کانونی $FF' = 2c$

(۴) A' و A دو سر قطر کانونی یا ۲ رأس کانونی

B' و B دو سر قطر غیرکانونی

F' و F کانون‌ها که همیشه در شکم هذلولی قرار دارند.

O مرکز است که وسط AA' و BB' و FF' است.



(۳) رابطه ی مهم هذلولی: $c^2 = a^2 + b^2$

(۴) خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

توجه: در بیضی ($e > 1$) است.

(۵) طول وتر کانونی بیضی: $MN = \frac{2b^2}{a}$

(۶) مختصات رئوس و کانون‌ها:

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} \alpha \\ o+\beta \end{vmatrix} & A \begin{vmatrix} a+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix} & A' \begin{vmatrix} -a+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} o+\alpha \\ b+\beta \end{vmatrix} & B \begin{vmatrix} o+\alpha \\ -b+\beta \end{vmatrix} & B' \begin{vmatrix} c+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix} & F \begin{vmatrix} -c+\alpha \\ o+\beta \end{vmatrix} \end{array}$$

مختصات مرکز



0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh



@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

تبدیل یا جایگشت:

نکات مهم در تبدیل:

۱- نماد فاکتوریل به صورت (!) می باشد و به مفهوم زیر است:

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1$$

نکته: بر طبق قرارداد

$$0! = 1 \quad 1! = 1$$

تبدیل که یک انتخاب r تایی از یک مجموعه n تایی با در نظر گرفتن جایجایی است مطابق فرمول زیر بیان می گردد.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

n شی متمايز را به چند طریق می توان در یک ردیف در کنار هم قرار داد؟ $n!$

تبدیلات یکی در میان

حالت (۱): اعضای ۲ گروه برابر نباشند. $n! \times m!$

حالت (۲): اعضای ۲ گروه برابر باشد. $۲ \times m! \times m!$

تبدیلات دایره ای:

هرگاه n شی متمايز بخواهند دور یک محیط دایره ای قرار گیرند:

حالت (۱): اشیاء قابل وارونه شدن نباشد: $(n-1)!$

حالت (۲): اشیاء قابل وارونه شدن باشد. $\frac{(n-1)!}{۲}$

تبدیل یا اعضای تکراری

$$n!$$

حاصل ضرب فاکتوریل اعضای تکراری

مثال:

با ارقام ۱, ۱, ۱, ۲, ۳, ۳, ۳ چند عدد ۶ رقمی می توان ساخت؟

$$\frac{6!}{۳! \times ۳!}$$

$$r \times P(n-k, r-k)$$

تبدیلات شامل k عضو خاص

تبدیلات فاقد k عضو خاص

$$P(n-k, r)$$

ترکیب

تعداد انتخاب های r تایی از یک مجموعه n تایی بدون در نظر گرفتن حالت جایجایی

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال:

یک مجموعه n عضوی چند زیر مجموعه r عضوی دارد؟

$$\binom{n}{r}$$

احتمال:

آزمایش تصادفی: هر آزمایشی که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد. مانند پرتاب تاس یا سکه.

فضای نمونه: مجموعه تمام حالاتی که ممکن است در یک آزمایش تصادفی اتفاق بیافتد که آن را با S نمایش می دهیم.

$n(S) =$ (تعداد وجه) \Rightarrow تعداد اعضای فضای نمونه ای

پیشامد تصادفی: زیر مجموعه ای از فضای نمونه ای است.

نکات: (۱) در هذلولی همیشه $a > b$ یا $a < b$ یا $a = b$ است.

(۲) تشخیص نوع هذلولی اگر کسر مثبت شامل x بود \leftarrow افقی

اگر کسر مثبت شامل y بود \leftarrow قائم

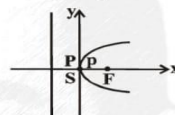
(۳) عدد مخرج کسر مثبت همیشه a^2 است.

(۴) اگر $a = b$ باشد به این هذلولی متساوی القطرین می گویند

سهمی

مجموعه نقاطی از صفحه که از یک قطعی ثابت و یک خط ثابت در

کانون خط هادی



صفحه به یک فاصله باشند.

سهمی بر ۴ نوع می باشد.

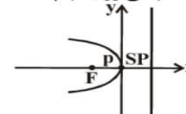
(۱) سهمی رو به راست

$$S \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \quad F \begin{cases} P + \alpha \\ \circ + \beta \end{cases}$$

معادله خط هادی $x = -P + \alpha$

معادله سهمی رو به راست $(y - \beta)^2 = ۴P(x - \alpha)$

(۲) سهمی رو به چپ



$$S \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \quad F \begin{cases} -P + \alpha \\ \circ + \beta \end{cases}$$

معادله خط هادی $x = P + \alpha$

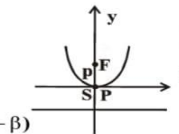
معادله سهمی رو به چپ $(y - \beta)^2 = -۴P(x - \alpha)$

(۳) سهمی رو به بالا

$$S \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \quad F \begin{cases} \circ + \alpha \\ P + \beta \end{cases}$$

معادله خط هادی $y = -P + \beta$

معادله سهمی رو به بالا $(x - \alpha)^2 = ۴P(y - \beta)$

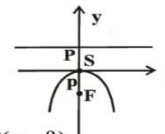


(۴) سهمی رو به پایین

$$S \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \quad F \begin{cases} \circ + \alpha \\ -P + \beta \end{cases}$$

معادله خط هادی $y = P + \beta$

معادله سهمی رو به پایین $(x - \alpha)^2 = -۴P(y - \beta)$



نکات:

(۱) کانون همیشه در شکم سهمی است و خط هادی در پشت سهمی است.

(۲) فاصله رأس تا خط هادی = فاصله کانونی تا رأس

$۲P =$ فاصله کانونی تا خط هادی

(۳) سهمی رو به هر محوری باز شود، متغیر مربوط به آن محور از درجه اول است.

(۴) اگر فرم ضمنی در هر شرایطی به فرم کانونی تبدیل شود.

(۵) طول وتر کانونی $۴P =$





ریاضی تجربی

احتمال وقوع هر پیشامد:

برابر است با تعداد حالات مساعد به تعداد کل حالتها

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

قوانین احتمال:

۱- احتمال وقوع هر پیشامد عددی است از صفر تا یک

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۲- متمم هر پیشامد: متمم پیشامد A را با A' یا A^c نمایش می دهد و بدین مفهوم است که اگر A اتفاق بیافتد A' اتفاق نمی افتد و یا بالعکس.

$$P(A) + P(A') = 1 \quad \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

۳- قانون جمع احتمال:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۴- دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد را ناسازگار گویند که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

۵- دو پیشامد مستقل:

دو پیشامد را مستقل از هم گویند که وقوع یکی ربطی به دیگری نداشته باشد.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \text{شرط دو پیشامد مستقل}$$

۷- احتمال شرطی:

می خواهیم احتمال پیشامد A را حساب کنیم به شرط اینکه احتمال پیشامد B را بدانیم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه P(A|B) کدام است؟ بدینم می خواهیم

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

۸- توزیع دو جمله ای:

در انجام عمل با احتمال P, n شیء شرکت می کنند احتمال اینکه K شیء به نتیجه دلخواه برسند.

$$P(A) = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$$

دسته بندی داده ها
 ۱- دامنه تغییرات (R) = Max - Min
 ۲- تعداد دسته ها (x) بین ۵ تا ۲۰ است.

$$C = \frac{R}{K} \quad \text{۳- طول دسته (c)}$$

آمار:

نکته (۱):

اگر به تمام داده ها مقدار ثابت K را اضافه یا کم کنیم در دامنه تغییرات، تغییری ایجاد نمی شود.

نکته (۲):

اگر تمام داده ها در عدد ثابت k ضرب گردد، دامنه تغییرات در |k| ضرب می شود.

۴- فراوانی مطلق (Fi)

تعداد داده هایی که در هر طبقه قرار می گیرند.

نکته «۳»

مجموع فراوانی همیشه برابر است با تعداد داده ها.

$$f_i = \frac{F_i}{N} \quad \text{۵- فراوانی نسبی}$$

تعداد داده

برابر است با فراوانی مطلق تقسیم بر تعداد داده ها.

نکته «۴»

مجموع فراوانی نسبی همواره برابر با یک

$$P_i = \frac{f_i}{N} \times 100 \quad \text{۶- درصد فراوانی}$$

برابر است با فراوانی نسبی ضربدر صد.

نکته «۵»

مجموع درصد فراوانی همواره برابر با ۱۰۰ است.

۷- فراوانی تجمعی (FC)

برابر است با فراوانی مطلق آن دسته + فراوانی تجمعی دسته ماقبل.

نکته «۶»:

فراوانی تجمع دسته اول با فراوانی مطلق دسته اول برابر است.

فراوانی تجمعی دسته آخر برابر با تعداد داده ها است.

۸- مرکز دسته (xi) { میانگین - نشانه - مرکز }

حد پایین دسته + حد بالای دسته

$$\frac{\sum}{2}$$

نکته «۷»

اختلاف دو مرکز دسته متوالی همان طول دسته است.

الف) میانگین

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} \quad \text{بدون فراوانی}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} \quad \text{با فراوانی}$$

۱- میانگین همواره عددی است، بین بیشترین و کمترین داده.

۲- اگر به تمام داده ها مقدار ثابت k را اضافه یا کم کنیم میانگین نیز با این عدد ثابت جمع یا کم می شود.

۳- اگر تمام داده ها در عدد ثابت k ضرب گردد میانگین نیز در این عدد ثابت ضرب می شود.

۴- اگر داده ها تشکیل تصاعد عددی دهند، میانگین برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{\max + \min}{2}$$

۵- اگر داده ها با هم برابر باشند، داریم:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

۶- مجموع اعداد طبیعی مطابق رابطه زیر حساب می گردد.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ب) میانه

داده ها را به صورت صعودی یا نزولی مرتب کنید.

اگر تعداد داده ها:

فرد باشد ← میانه: داده وسطی

زوج باشد ← میانه: میانگین دو داده وسطی

د) مد

داده ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد.



0912 004 1804 - 0939 346 3778
 @pmm_kourosh_mirizadeh
 @kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

خط و نقطه
 نکته ۱:

میانۀ پاره خطی است که از رأس مقابل شروع و به وسط ضلع مقابل فرود می آید.
 ۴- اگر میانۀ های یک مثلث را رسم کنیم، این سه میانۀ همدیگر را در نقطه ای مانند G قطع می کنند.

$$G \begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G \end{cases}$$

۵- اگر مختصات رأس مثلثی معلوم باشد مساحت آن مطابق رابطه زیر حساب می شود.

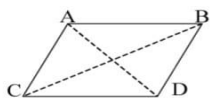
$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} |(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{n-1}y_n) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \dots + y_{n-1}x_n)|$$

مساحت

ب) مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2} |-1(3-0) + 0(2-0) + 2(2-3)| = \frac{1}{2} |-5| = \frac{5}{2}$$



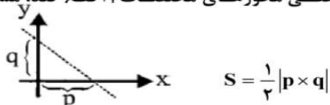
۶- در هر متوازی الاضلاع داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

نکته ۲:

برای بدست آوردن محل تلاقی دو قطر متوازی الاضلاع وسط AC یا BD را بدست می آوریم.

۸- هرگاه خطی محورهای مختصات ۱ قطع کند، مساحت مثلث ایجاد شده:



$$S = \frac{1}{2} |p \times q|$$

طول از مبدأ: p

عرض از مبدأ: q

۹- شیب برابر است با تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور x ها ایجاد می کند.

$$m = \text{tg} \alpha$$

زاویه با جهت مثبت محور x ها

۱۰- هرگاه دو نقطه معلوم باشد شیب بصورت زیر است:

$$m = \frac{\text{تفاضل عرضها}}{\text{تفاضل طولها}} = \frac{A - B}{\dots}$$

۱۲- وضعیت دو خط نسبت به هم:

الف) موازی یکدیگر: شیب آنها باید برابر باشد. $m_1 = m_2$
 ب) عمود برهم: باید ضرب شیبها برابر -۱ باشد و یا شیب یکی عکس و قرینه دیگری باشد یا

$$m_2 = \frac{1}{-m_1} \quad m_1 \times m_2 = -1 \quad m_1 = \frac{1}{-m_2}$$

۲- شاخص های پراکندگی: عبارتند از: واریانس (پراش) - انحراف معیار - ضریب تغییرات.

$$S^2 = \delta^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

بدون فراوانی

$$S^2 = \delta^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum F_i}$$

با فراوانی

الف) واریانس $S^2 = \delta^2$

ب) انحراف معیار $S = \delta \sqrt{\text{واریانس}}$

ج) ضریب تغییرات $cv = \frac{\delta}{\bar{x}} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$

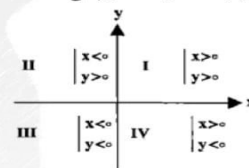
نکات مهم در واریانس و انحراف معیار:

- مجموعه ای از داده ها واریانس بیشتری دارد که دامنه تغییرات بیشتری داشته باشد.
- فقط در یک حالت واریانس - انحراف معیار - ضریب تغییرات صفر است و آن هم زمانی است که تمام داده ها با هم برابر باشد.
- اگر تمام داده ها با عدد ثابت k ضرب گردد در واریانس و انحراف معیار تغییری ایجاد نمی شود.
- اگر تمام داده ها در عدد ثابت k ضرب گردد انحراف معیار در قدر مطلق |k| واریانس در k^2 ضرب می شود.
- اگر تمام داده ها تشکیل تصاعد عددی دهند انحراف معیار مطابق فرمول زیر حساب می گردد.

$$\delta = d \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} \quad d \leftarrow \text{قدر نسبت تصاعد}$$

خط و نقطه و قرینه یابی
 نکته:

۱- دستگاه محورهای مختصات صفحه را به ۴ ناحیه تقسیم می کند.

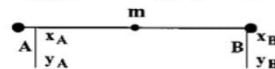


۲- معادله محور x ها بصورت $y = 0$ می باشد، یعنی هر نقطه روی محور x ها y آن صفر است و معادله محور y ها، $x = 0$ است.

معادله نیمساز ناحیه اول و سوم خط $y = x$ و نیمساز ناحیه دوم و چهارم خط $y = -x$ است.

۳- بدست آوردن طول پاره خط AB وقتی مختصات دو سر آن معلوم باشد.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



$$m = \begin{cases} x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_m = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$





0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh

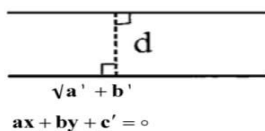


@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

۱۸- فاصله دو خط موازی
 $ax + by + c = 0$



$\sqrt{a^2 + b^2}$

$ax + by + c' = 0$

نکته ۶:

قبل از استفاده از این فرمول، ضرایب x ها و y ها باید برابر شوند.

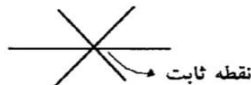
معادله دسته خط:

مجموعه خطوطی که از یک نقطه ثابت می‌گذرند، به دسته خط معروفند و برای نوشتن معادله دسته خط داشتن معادله دو خط کافی است.

(معادله خط دیگر) m = (معادله خط)

هر عدد دلخواه

برای بدست آوردن نقطه ثابت یک دسته خط دو m دلخواه به معادله بدهید، دو معادله بدست می‌آید. نقطه تلاقی این دو معادله نقطه ثابت دسته خط است.

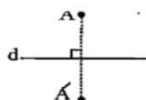
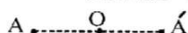


نقطه ثابت

تقارن:

۱- مرکزی: قرینه نسبت به یک نقطه O وسط AA' است.

۲- محوری: قرینه نسبت به یک خط



خط d عمود منصف AA' است.

قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به:

۱- محور x ها $A'(x, -y)$

۵- نیمساز ناحیه ۲ و ۴ $A'(-x, -y)$

۲- محور y ها $A'(-x, y)$

۶- نقطه $A'(2\alpha - x, 2\beta - y)$

۳- مبدأ مختصات $A'(-x, -y)$

۷- خط $x = a$ $A'(2a - x, y)$

۴- نیمساز ناحیه ۱ و ۳ $A'(x, 2y - y)$

۸- خط $y = b$ $A'(x, 2b - y)$

ج) مستقاطع هم: برای بدست آوردن نقطه تلاقی کافیست دو خط را در یک دستگاه قرار داده و حل کنیم.

۱۳- دو خط $ax + by + c = 0, a'x + b'y + c' = 0$ مفروض است.

متعلق $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
 موازی $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
 متقاطع $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

عمود $aa' + bb' = 0$
 عمود نیست $aa' + bb' \neq 0$

۱۴- طریقه نوشتن معادله یک خط: نیاز به یکی از دو اطلاعات زیر داریم:

۱- یک نقطه و شیب داشته باشیم:

$A(x_0, y_0), m \quad y - y_0 = m(x - x_0)$

۲- دو نقطه از خط معلوم باشد: بعد از اینکه شیب بدست آمد هر کدام از دو نقطه معادله خط می‌نویسیم.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

نکته ۳:

اگر در حل مسئله $m = \infty$ شد. معادله خط بصورت $x = x_0$ است.

نکته ۴:

اگر دو نقطه داده شده بصورت $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ باشد معادله خط همواره بصورت $x = a$ می‌باشد.

نکته ۵:

اگر دو نقطه داده شده بصورت $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ باشد معادله خط همواره بصورت $y = b$ خواهد بود.

۱۵- برای دو خط متقاطع:

نقطه تلاقی: دو خط را که در یک دستگاه قرار می‌دهیم و حل می‌کنیم جواب دستگاه نقطه تلاقی است.

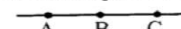
زاویه بین دو خط: شیب هر خط را بدست آورده و m_1, m_2 می‌نامیم و از رابطه زیر بدست می‌آوریم. α زاویه بین دو خط است.

$tg\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

۱۵- شرط اینکه سه خط در یک نقطه متقاطع باشند (همرس باشند) - متقارب باشند) این است که نقطه تلاقی دو خط باید در خط سوم صدق کند.

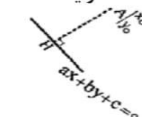
۱۶- شرط اینکه ۳ نقطه بر یک استقامت باشند (روی یک خط باشند):

$M_{AB} = M_{AC} = M_{BC}$



۱۷- فاصله یک نقطه از یک خط:

$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$





0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh



@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

طریقه بدست آوردن ماتریس معکوس 2×2 :

- 1- جای عناصر قطر اصلی عوض شود.
- 2- عناصر قطر فرعی را قرینه می کنیم.
- 3- تمام عناصر را بر دترمینان ماتریس اصلی تقسیم می کنیم.

نکاتی در مورد دترمینان و ماتریس وارون:

$$1) A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

$$2) |A^n| = |A|^n$$

$$3) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, \quad |A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$$

ماتریس تقارن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نسبت به محور x ها

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نسبت به محور y ها

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نسبت به مبدأ مختصات

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم

تحلیل دستگاه های معادلات خطی:



نکته مهم:

برای تحلیل دستگاه های 2 معادله 2 مجهول ناهمگن:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \rightarrow \text{جواب منحصر بفرد} \rightarrow \text{دستگاه سازگار}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \rightarrow \text{دستگاه مبهم ناسازگار} \rightarrow \text{بی شمار جواب} = \frac{c_1}{c_2}$$

دو دستگاه هم ارز:

دو دستگاه را هم ارز گویند که جواب یکی در دیگری صدق کند و برعکس.

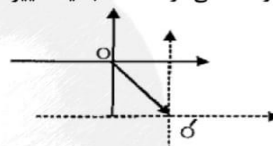
به $(a+b)^n$ بسط دو جمله ای گویند.

1- هر بسط $(n+1)$ جمله دارد.

$$\binom{n}{k-1} (a)^{n-(k-1)} (b)^{(k-1)}$$

انتقال محورها:

هرگاه محورهای مختصات را به موازات خود انتقال دهیم، بطوریکه مبدأ مختصات از نقطه $O \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ به مختصات $O' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ منتقل گردد، مختصات نقاط و معادلات خط و منحنی در دستگاه جدید تغییر می کند.



جدید $X = x - \alpha$

جدید $Y = y - \beta$

نکته 8:

در انتقال محورها شیب خط تغییر نمی کند.

جمع و تفریق 2 ماتریس:

دو ماتریس وقتی قابلیت جمع و تفریق را دارند که: 1- حتماً دو ماتریس هم مرتبه باشند. 2- برای جمع یا تفریق عضوهای نظیر را با هم جمع یا از هم کم می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

خواص جمع ماتریسی:

1) $A + B = B + A$ جمع ماتریس خاصیت جابجایی دارد.

2) $A + 0 = 0 + A = A$

جمع ماتریس ها خاصیت حذف دارد.

3) $A + C = B + C \Rightarrow A = B$

ضرب عدد در ماتریس:

آن عدد در تک تک عضوهای ماتریس ضرب می گردد.

$$r \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس:

دو ماتریس وقتی قابلیت ضرب دارند که تعداد ستون های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.

خواص ضرب ماتریسی:

1) $A \times B \neq B \times A$ ضرب ماتریس خاصیت جابجایی ندارد.

2) $A \times I = I \times A = A$

3) $A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$ ضرب ماتریس ها خاصیت حذف ندارد.

ن بار

4) $A^n = A \times A \times \dots \times A$

«دترمینان ماتریس 2×2 »

دترمینان ماتریس A را به صورت $|A|$ نشان می دهند و بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

وارون ماتریس 2×2 (معکوس)

1- ماتریسی معکوس پذیر است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

2- وارون ماتریس A را با A^{-1} نمایش می دهند.





0912 004 1804 - 0939 346 3778



@pmm_kourosh_mirizadeh



@kourosh_mirizadeh



ریاضی تجربی

۲- برای نوشتن جمله k ام یک بسط

$$\binom{9}{6-1} (2x)^{9-5} (-y)^5 = -136 \times 16 \times x^4 y^5$$

ضریب تغییر بسط ضریب عددی

۳- برای بدست آوردن مجموع ضرایب عددی کافیست جای تمام متغیرها عدد یک را قرار دهید.

$$x=y=1 \Rightarrow (2-1)^9 = 1^9 = 1$$

۴- هرگاه میانگین ضریب عددی را بخواهد:

$$\text{میانگین ضرایب} = \frac{\text{مجموع ضرایب عددی}}{\text{تعداد جملات}}$$

$$\text{مجموع ضرایب} \Rightarrow x=1 \Rightarrow 5^4$$

$$\text{تعداد جملات} \Rightarrow 4+1=15$$

$$\text{میانگین} = \frac{5^4}{15} = 5^2 = 125$$

۵- برای بدست آوردن بزرگترین ضریب عددی اگر

$$n \leftarrow \text{زوج} \quad \leftarrow \frac{n}{2} + 1 \text{ جمله}$$

$$n \leftarrow \text{فرد} \quad \leftarrow \frac{n}{2} + 1 \text{ جملات طرفین}$$

۶- هرگاه در بسط ضریب جمله P ام با ضریب جمله r ام باهم برابر باشد، حتماً داریم:

$$P+r=n+2$$

۷- اگر عدد ثابت یک بسط را بخواهید، به جای تمام متغیرها عدد صفر قرار دهید.

(ب) روش تستی: در بسط $(x^a \pm x^b)^n$ جمله مستقل از x جمله

$$k = \frac{na}{a-b} + 1$$

